SEDUC
Secretaria de Estado
de Educação

Governo de Mato Grosso

Aprendizagem Conectada
Atividades escolares
11ª Semana

1º Ano/EM

Nome da Escola	
Nome do Estudante	
Ano/Ciclo	

Unidade 2

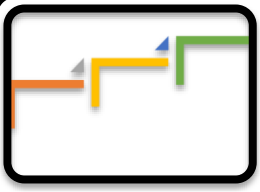
Área de Matemática

1. Classificação de uma Progressão Aritmética - PA

Olá, jovem estudante!

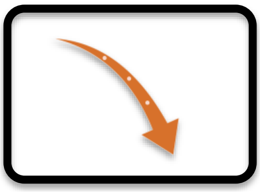
No último caderno de Atividades Escolares você estudou sequências, no qual foi apresentada uma sequência especial chamada de Progressão Aritmética – PA. Nesta semana, daremos continuidade a esse tema. Então, vamos lá.

1.1. Classificação de uma PA



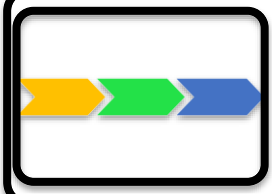
PA crescente

Uma PA é crescente quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior. Isso só acontece quando a **razão** é **positiva**. **Exemplo**: (15, 19, 23, 27, ...) é uma PA crescente. Veja que a razão é positiva: r = 19-15 = 4



PA decrescente

Uma PA é decrescente quando termo a partir do segundo, é menor que o anterior. Isso só ocorre quando a **razão** é **negativa**. **Exemplo**: (23, 18, 13, 8, 3, ...) é uma PA decrescente. Veja que a razão é negativa: r = 18 - 23 = -5



PA constante

Uma PA é constante quando todos os seus termos são iguais. Isso acontece quando a **razão** é nula. Exemplo: (3,3,3,3, ...). Note que a razão é nula: r = 3 - 3 = 0

1.2 Representação gráfica de uma PA

Observe a sequência dos números ímpares: (1, 3, 5, ...). Nessa sequência temos que: $a_1 = 1$ $a_n = ?$ $n = ?$ $r = 3 - 1 = 2$

Aplicando a fórmula do termo geral de uma **PA $a_n = a_1 + (n - 1)\ r$**, temos:

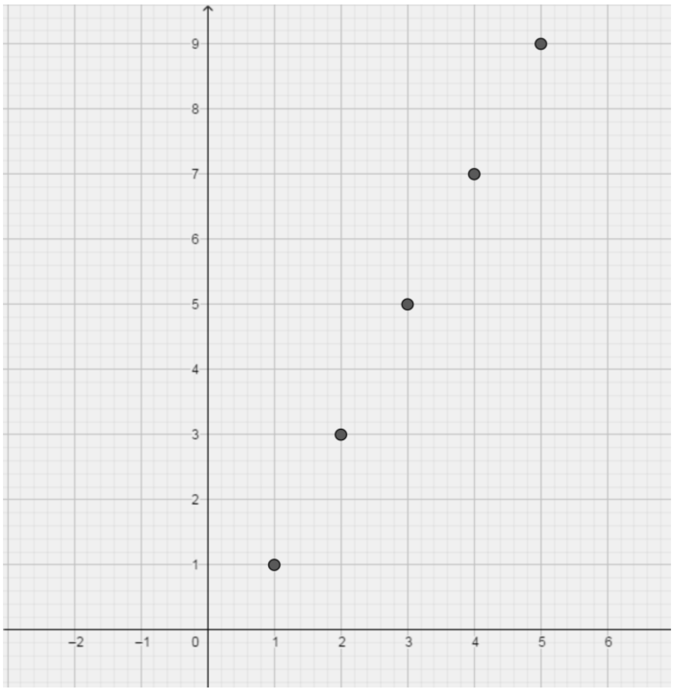
$a_n = 1 + (n - 1).\ 2 \implies a_n = 1 + 2n - 2 \implies a_n = -1 + 2n$

Podemos atribuir valores do conjunto dos números naturais para preencher o quadro abaixo:

n (termo)	a_n (valor do termo)
1	$a_n = -1 + 2n = -1 + 2.1 = 1$
2	$a_n = -1 + 2n = -1 + 2 . 2 = 3$
3	$a_n = -1 + 2n = -1 + 2 . 3 = 5$
4	$a_n = -1 + 2n = -1 + 2 . 4 = 7$
5	$a_n = -1 + 2n = -1 + 2 . 5 = 9$

Identificamos o termo geral $a_n = -1 + 2n$ como uma função afim $y = -1 + 2x$ quando x assume apenas valores naturais não nulos.

Figura 1: Gráfico de uma PA



- Note que marcamos no gráfico os pontos (1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7) e (5, 9), conforme mostra o gráfico ao lado.
- A representação gráfica da PA (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) é representada por pontos (n, a_n) do plano cartesiano.
- O gráfico é formado por pontos, não traçamos a reta, porque o domínio é o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}^*$).

1.3 Somando progressões aritméticas

O professor Büttner era muito bravo e exigente. Conta a história que em 1785, em uma pequena escola, para manter seus alunos ocupados e em silêncio, ele propôs que todos os alunos somassem todos os números de um a cem. Um de seus alunos, chamado Carl Friedrich Gauss, que na época, tinha aproximadamente dez anos, terminou quase que imediatamente o exercício e foi o único a acertar o resultado, utilizando apenas cálculo mental. Posteriormente, devido a seus trabalhos, Gauss foi considerado um dos principais matemáticos de todos os tempos.

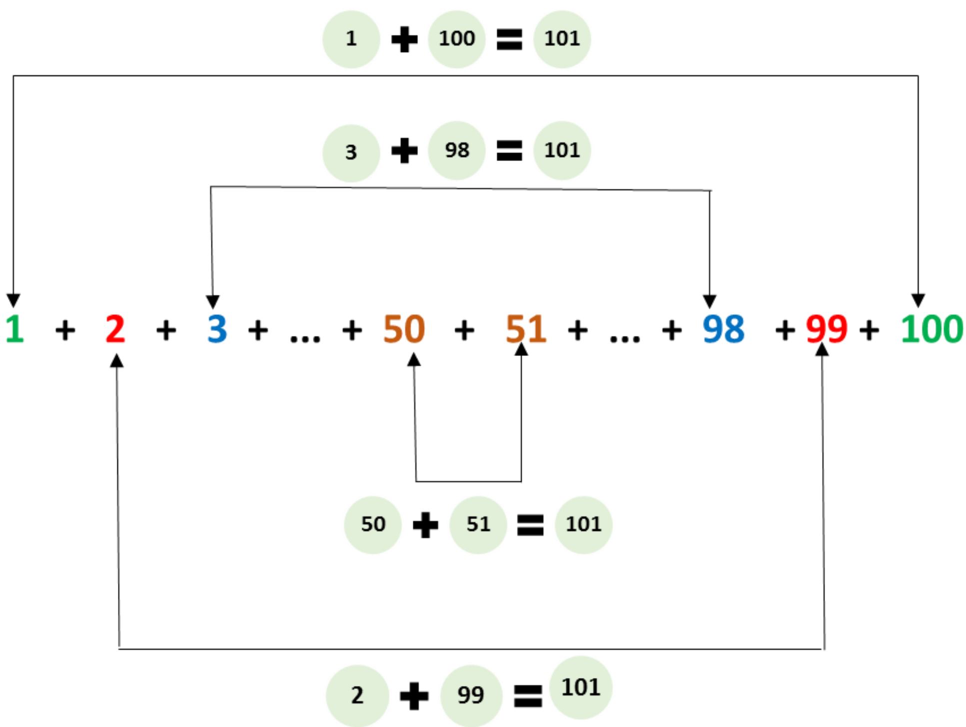
Ficou curioso(a)? Então, tente encontrar a solução e depois continue a leitura.

Figura 2: Friedrich Gauss

Fonte: wikipedia (2020).

Conseguiu encontrar o resultado? Vamos conferir se você acertou. Gauss usou a seguinte estratégia:

Figura 3: esquema para somar PA.



Note que os números de 1 até 100 formam uma progressão aritmética (1, 2, 3, ..., 98, 99, 100, ...) com o primeiro termo igual a 1 e razão 1. Assim, o que o professor solicitou é a soma dessa progressão.

Gauss compreendeu que:

- ☑ A soma do primeiro número com o último é igual a 101 ⇒ 1 + 100 = 101
- ☑ A soma do segundo número com o penúltimo é igual a 101 ⇒ 2 + 99 = 101
- ☑ A soma do terceiro número com o antepenúltimo é igual a 101 ⇒ 3 + 98 = 101 e assim sucessivamente.

Agrupando-se os números de dois em dois, como indica o esquema acima, temos 50 parcelas iguais a 101. Assim, a soma será igual a 50. 101, ou seja, 5 050. Esse raciocínio pode ser generalizado para o cálculo da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer.

A soma S_n dos n primeiros da PA (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) é dada pela fórmula:

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

a_1 é o primeiro termo.
a_n é o enésimo termo.
n é o número de termos.
S_n é a soma dos termos.

Como aplicar a fórmula da soma

1. Vamos usar a fórmula para calcular a atividade proposta pelo professor de Gauss: somar todos os números naturais de um a cem.

Resolução:

Na PA (1, 2, 3, ..., 98, 99, 100, ...), temos:

$a_1 = 1$

$a_n = 100$

n = 100

S_n = ?

$$s_n = \frac{(1 + 100).100}{2}$$

$$s_n = \frac{101.100}{2}$$

$$s_n = \frac{10\,100}{2}$$

$$s_n = 5\,050$$

2. Um corpo em queda livre percorre 3 m no primeiro segundo, 12 m no segundo, 21 m no terceiro segundo, e assim sucessivamente. Continuando nessa sequência, quantos metros terá percorrido após 10 segundos?

Resolução:

$a_1 = 3$

a_n = ?

n = 10

r = 12 – 3 = 9

S_n = ?

Para aplicar a fórmula da soma, precisamos encontrar o termo a_n. Então, vamos primeiro empregar a fórmula do termo geral.

$a_n = a_1 + (n - 1)\, r$

$a_n = 3 + (10 – 1)\, 9 \Rightarrow a_n = 3 + 9.\, 9 \Rightarrow$

$a_n = 3 + 81 \Rightarrow a_n = 84$

Como já encontramos o termo a_n, agora aplicaremos a fórmula da soma de uma PA.

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

$$s_n = \frac{(3 + 84).\ 10}{2}$$

$$s_n = \frac{87.\ 10}{2}$$

$s_n = \frac{8\,70}{2}$ $\Rightarrow s_n =$ 435 m. Em 10 segundos terá percorrido 435 m.

Desafios - Matemática

1. Calcular a soma dos 20 primeiros termos da PA (3, 7, 11, 15, ...).

2. Dada a PA (2, 7, 12, 17, ...42), determine:

a) O número de termos.

b) A soma dos termos.

3. Classifique como crescente, decrescente ou constante cada uma das progressões aritméticas:

a) (4, 7, 10 13, ...) = ____

b) (-14, -10, -6, -2, ...) = ____

c) (28, 20, 12, 4, ...) = ____

d) (10,10,10,10, ...) = ____

4. (ENEM 2013) As projeções para a produção de arroz no período de 2012-2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	**Projeto da Produção (t)**
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de:

a) 497,25. **b)** 500,85. **c)** 502,87. **d)** 558,75. **e)** 563,25.