SEDUC Secretaria de Estado de Educação — Governo de Mato Grosso

Secretaria Adjunta de Gestão Educacional - SAGE

Aprendizagem Conectada
Atividades escolares
5ª Semana

1° Ano/EM

Nome da Escola	
Nome do Estudante	
Ano/Ciclo	

Unidade 2

Área de Matemática

1. Função exponencial

Estudamos nas duas primeiras semanas a noção de função exponencial no contexto da pandemia que está ocorrendo no ano de 2020.

Fonte: https://www.mariaaugusta.com.br//

Além do contexto da disseminação do novo Coronavírus, a função exponencial também pode ser aplicada em outras situações do cotidiano, tais como: crescimento populacional, desintegração de substâncias radioativas, aplicações financeiras, reprodução de bactérias, entre outros. Nesta semana iremos retomar o assunto com a finalidade de construir gráficos e analisar algumas propriedades das funções exponenciais.

Como a função exponencial é definida?

A função exponencial é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$, definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$, em que **a** é um número real, maior que zero e diferente de 1.

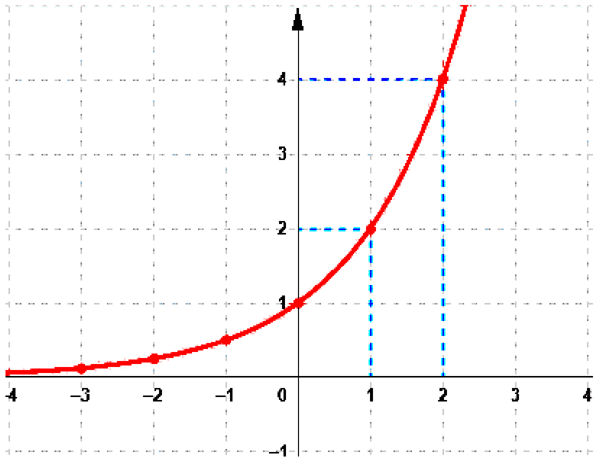
A função exponencial não pode ter na base o valor 1 (um), pois assim ela não seria exponencial, e sim, constante. Além do mais, a base não pode ser negativa e nem zero, pois não é possível, nestes casos, definir a função.

Gráfico e propriedades da função exponencial

Vamos esboçar o gráfico de funções exponenciais a partir de alguns pontos obtidos por meio de uma tabela, de acordo com os exemplos a seguir.

Exemplo 1: f(x) = 2^x

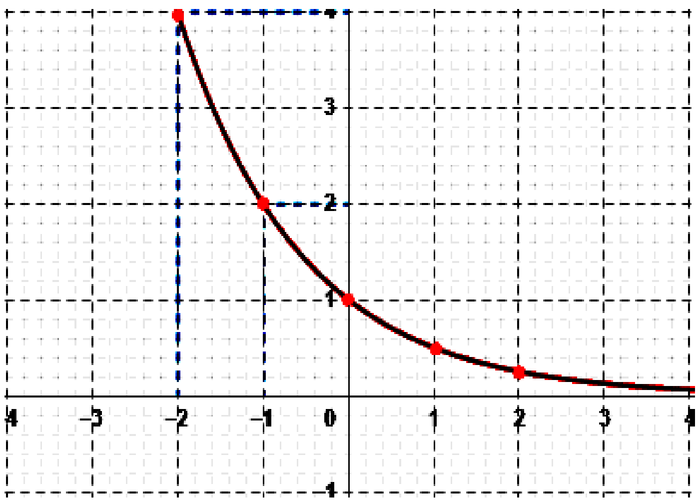
x	y = 2^x
-2	$y = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
-1	$y = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$y = 2^0 = 1$
1	$y = 2^1 = 2$
2	$y = 2^2 = 4$



- ✓ A tabela e o gráfico do exemplo 1 mostram que quando aumentamos o valor de x, a sua imagem também aumenta (os valores de y também aumentam).
- ✓ Se **a** > **1**, então **a função exponencial será crescente.** No exemplo 1, a função y= 2^x é uma função crescente e sua curva é exponencial.

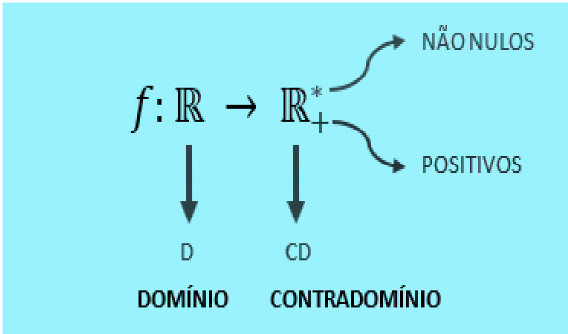
Exemplo 2: f(x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	y = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$
-1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$
0	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
2	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$



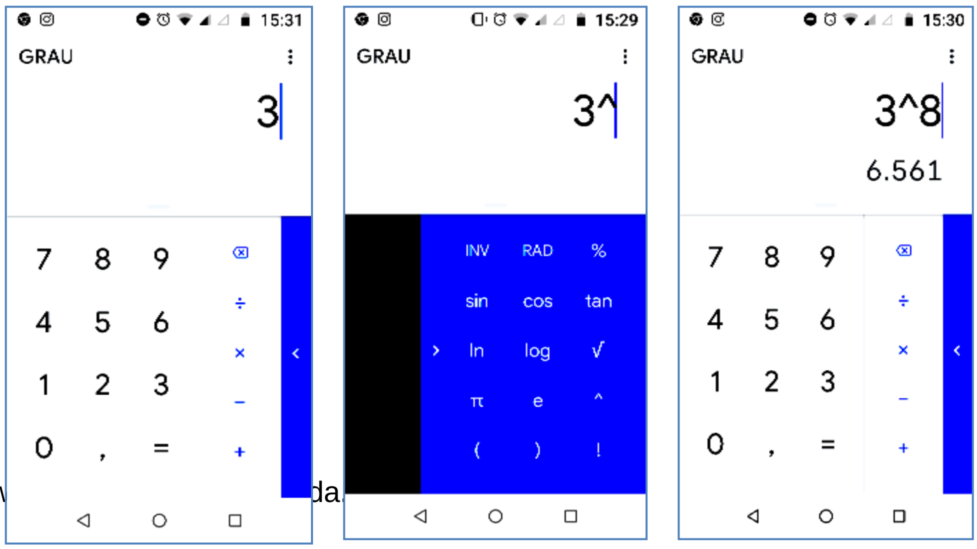
- ✓ Notamos que para esta função, enquanto os valores de x aumentam, os valores das respectivas imagens diminuem (os valores de y diminuem), formando uma curva exponencial.
- ✓ As funções cujas bases são valores maiores que zero e menores que 1 ($0 < a < 1$), são decrescentes. Assim a função do exemplo 2 **f(x)** = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **é uma função decrescente.**

Pela definição de função exponencial, temos que f: ℝ→ ℝ*+, isso significa que o domínio (conjunto de partida) é o conjunto dos números reais, representado pela letra ℝ e o contradomínio (conjunto de chegada), representado por ℝ*+, envolve somente os números reais positivos e não nulos.



É importante lembrar que o conjunto imagem de qualquer função é sempre um subconjunto do contradomínio desta função.

A função exponencial cresce muito rápido, por esse motivo, frequentemente, usamos a expressão: "*cresceu exponencialmente*". Assim, é muito difícil calcular funções desses tipos quando os valores são muito altos, então precisamos do auxílio de calculadoras. Por exemplo, para calcular o valor de $\mathbf{3^8}$ na calculadora científica do celular, digitam-se os números **3** (base), ^ (significa que estamos elevando um número ao expoente) e 8 (expoente). Analogamente obtém-se a potência de qualquer número real com esse mesmo procedimento.



2. Notação científica

No nosso cotidiano lidamos com números que expressam diversas grandezas. Alguns deles representam grandezas muito grandes ou muito pequenas. Por exemplo:

- Uma bactéria possui medidas da ordem dos micrômetros. Se ela medir 1 micrômetro, essa medida equivale a 0,000001 metro, ou seja, um milionésimo do metro.
- Um ano-luz tem aproximadamente 9 460 000 000 000 km.

Para facilitar o trabalho com números que ora são muito grandes, ora são muito pequenos, os cientistas estabeleceram uma notação simplificada para representá-los: **a notação científica.**

Um número em notação científica é escrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{a} \cdot 10^{b}$$

a é chamada mantissa, sendo $1 \leq a \leq 10$;

b é o expoente da potência (número inteiro).

$8 \cdot 10^{6} = 8\,000\,000$

6 casas

O sinal positivo no expoente descreve números maiores do que um. Assim, temos:

$10^{6} = 1\,000\,000$

$1\,000\,000 \times 8 = 8\,000\,000$

$8 \cdot 10^{-6} = 0{,}000008$

6 casas

O sinal negativo representa os números menores do que 1.

Assim, temos:

$10^{-6} = \dfrac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000\,001$

$0{,}000\,001 \times 8 = 0{,}000008$

Saiba mais em:

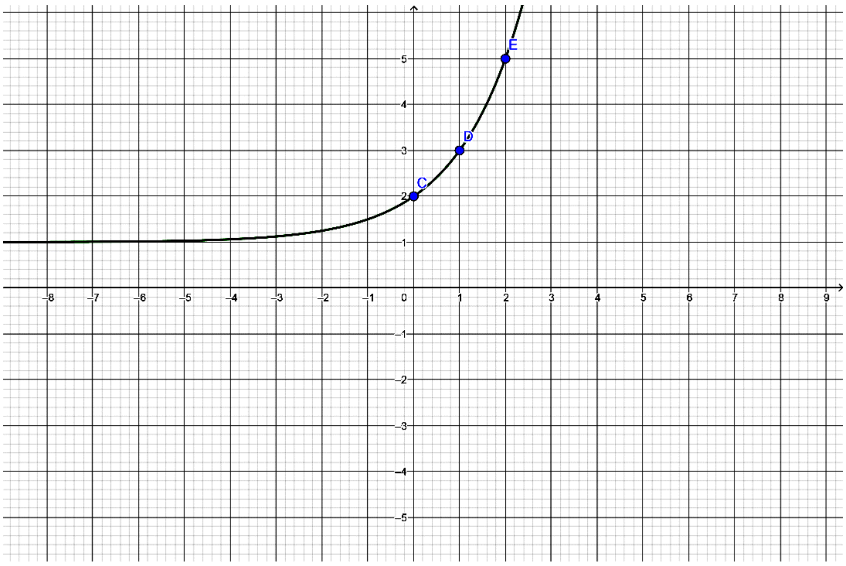
https://www.youtube.com/watch?time_continue=50&v=GHgri9urkgs&feature=emb_logo

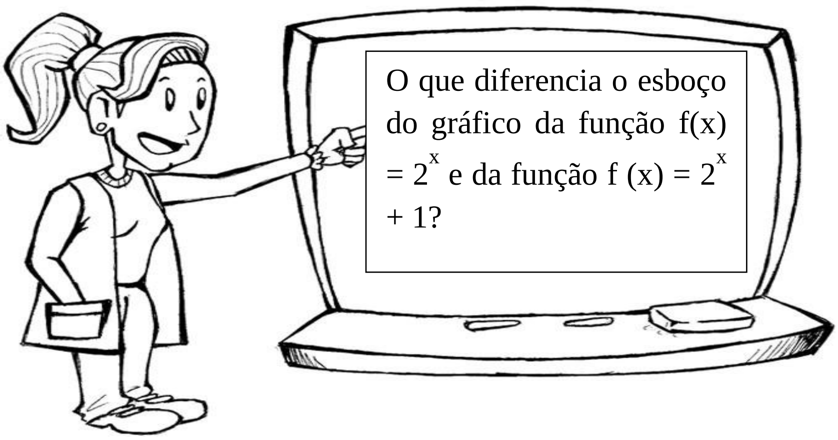
https://www.youtube.com/watch?v=Pq_bb-4WPyM

Os conceitos estudados na função exponencial $f(x) = a^x$ também podem ser aplicados em outros exemplos em que as variáveis da função estão no expoente, por exemplo:

a) $f(x) = 4 \cdot 3^x$
b) $f(x) = 2^x + 1$
c) $f(x) = 4$

Se atribuirmos valores aleatórios para a função $f(x) = 2^x + 1$, podemos obter os pares ordenados: (-2; 0,25); (-1; 1,5); (0, 2); (1, 3); (2, 5). Observe o esboço do gráfico:





Observe que:
$D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} / y > 1\}$, valores maiores que 1.

3. Equação exponencial

As equações são muito utilizadas para modelar diversos problemas matemáticos que fazem parte do contexto de algumas situações cotidianas.

Você sabe o que é uma equação? O que é uma equação exponencial? Em que contextos as equações são aplicadas?

Uma equação é uma igualdade em que não conhecemos o valor de pelo menos um termo. Os valores desconhecidos são substituídos por letras, que chamamos de **incógnitas.**

Observe alguns exemplos:

a) $9a + 4 = 3a + 8$

b) $2y = 10$

c) $x^2 + 2x + 1 = 0$

d) $b + 4 = 29$

Desafio!

Tente resolver esses exemplos de equações. Você já estudou isso no Ensino Fundamental.

Em algumas equações as **incógnitas** podem se apresentar no **expoente**. Vejamos alguns exemplos:

a) $\mathbf{3^x = 27}$ **b)** $\mathbf{25^{x+5} = 125^{x+2}}$ **c)** $\mathbf{5^{x+1} = 1}$

Equação exponencial é toda equação que apresenta a incógnita (representada por qualquer letra do alfabeto) no expoente de uma ou mais potências de base positiva e diferente de 1.

Resolução de uma equação exponencial

a) $\mathbf{3^x = 27}$

O primeiro passo para a resolução é **ter os dois lados da equação com a mesma base.** Então: $27 = 3^3$ (lembre-se da potenciação), depois basta **igualar os expoentes**.

$3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$. Observe que as bases ficaram iguais, então para satisfazer a igualdade, os expoentes precisam ser iguais. Logo: $S = \{3\}$

$$\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ \hline & 5.5.5 = 5^3 \end{array}$$

b) $\mathbf{125^{x+2} = 25^{x+5}}$

$125 = 5^3$ e $25 = 5^2$. Então: $5^{3\,(x+2)} = 5^{2\,(x+5)}$.

Depois, basta escrever os expoentes, usando a igualdade: $3(x + 2) = 2(x + 5)$.

Resolvendo a equação, temos: $3x + 6 = 2x + 10 \iff 3x - 2x = 10 - 6 \iff x = 4$. Logo: $S = \{4\}$

Agora é a sua vez!

Sabendo que $5^0 = 1$, resolva o terceiro exemplo: $\mathbf{5^{x+1} = 1}$

Quer saber mais sobre equação exponencial? Assista ao vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=3EXISt9iVqg

Desafios – Matemática

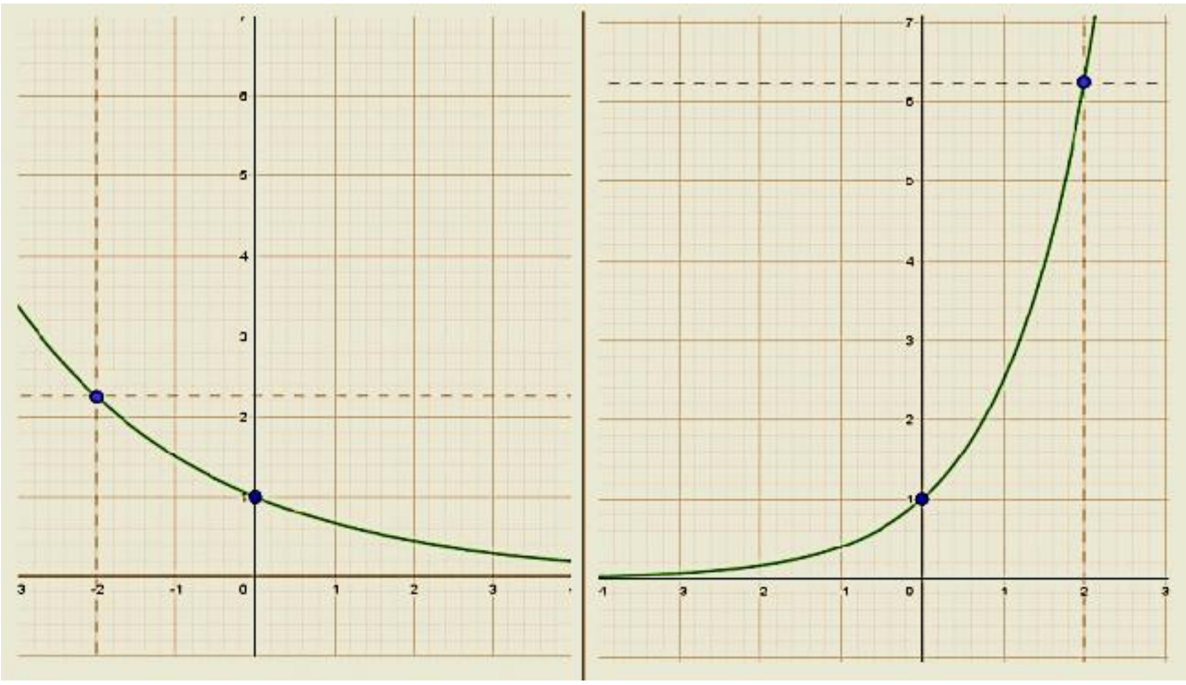
1. Dada a função exponencial $f(x) = 5^x$, determine:

a) f(0)

b) f (-2)

c) f (3)

2. Observe os gráficos que representam funções exponenciais.



Sabendo que a função f(x) tem como um dos pontos de seu gráfico (-2; 2,25). E a função g(x) tem como um dos pontos do seu gráfico (2; 6,25). Responda:

a) Se $f(x) = a^x$, então, $a > 1$ ou $0 < a < 1$?

b) Sendo $g(x) = b^x$, então, $b > 1$ ou$0 < b < 1$?

c) f(x) é crescente ou decrescente? E g(x),é crescente ou decrescente?

d) f (6) é maior, menor ou igual a f(2)?

e) g (6) é maior, menor ou igual a g (5)?

f) Traçando os gráficos de f no mesmo sistema de eixos, em que ponto os gráficos vão se intersectar (cortar)?

3. Uma situação problema foi representada pela equação exponencial:

$$\mathbf{32^{x+2} = 16^{x+1}}$$

a) Resolvi essa equação e obtive como resultado o valor igual a **-6**? Essa resolução está correta ou errada?

b) E se trocarmos as bases dessa equação exponencial por 6 e 216, respectivamente. Qual seria a solução da equação?

4. **(FMJ – SP**) O número de bactérias de uma cultura, **t** horas após o início de certo experimento, é dado pela expressão N (t) = 1 200 . $2^{0,4t}$. Nessas condições, quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 38 400 bactérias?

5. Para cada situação apresentada, marque a alternativa correta

(Enem 2015) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1 800,00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é s(t) = 1 800 . $(1,03)^t$.

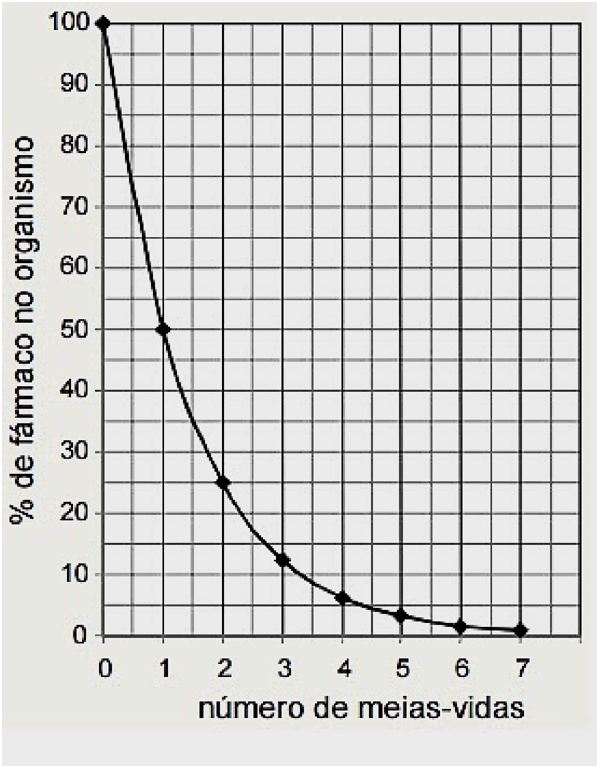
De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais,

a) 7 416,00
b) 3 819,24
c) 3 709,62
d) 3 708,00
e) 1 909,62.

(ENEM 2007) A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.

O gráfico abaixo representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

F. D. Fuchs e Cher l. Wannma. Farmacologia Clínica.
Rio de Janeiro: Guanabara Koogan,1992, p. 40.



A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12 h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13 h 30 min. será aproximadamente de

a) 10% b) 15% c) 25% d) 35% e) 50%

(UFRGS – 2013) Um adulto humano saudável abriga cerca de 100 bilhões de bactérias, somente em seu trato digestivo. Esse número de bactérias pode ser escrito como

a) 10^9
b) 10^{10}
c) 10^{11}
d) 10^{12}
e) 10^{13}

(ENEM 2012)A Agência Espacial Norte Americana (NASA) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.

Fonte: NASA AFP

Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a

a) $3,25.10^2$ km

b) $3,25.10^3$ km

c) $3,25.\ 10^4$ km

d) $3,25.\ 10^5$ km

e) $3,25.\ 10^6$ km