Revisão para o Enem

Pré-Enem Digit@l Gold

Componente Curricular

Matemática/Álgebra

Tema da Aula

Análise Combinatória

SEDUC Secretaria de Estado de Educação
Governo de Mato Grosso

Apresentação

Este material foi organizado pelo professor João Roberto Toledo de Andrade. Vale ressaltar que foi disponibilizado para a SEDUC – MT pelo professor para o projeto Pré-Enem Digit@l Gold.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Chamamos de Análise Combinatória a área da matemática que trabalha com os agrupamentos de elementos através de Fórmulas Matemáticas.

A Análise Combinatória também procura elaborar métodos que nos permitam encontrar o número de possibilidades que um evento pode ocorrer, sem a obrigatoriedade de descrevermos todos os eventos possíveis, exatamente como a Contagem faz, porém sem a obrigatoriedade de ter particularidades. A origem desse assunto está ligada ao estudo dos jogos de azar, tais como: lançamento de dados, jogos de cartas, etc.

Essa análise podem ocorrer de três formas:

Por Arranjos, Combinações ou Permutações.

1) ARRANJOS:

É a área da Análise Combinatória em que seus elementos de diferenciam entre si pela **ORDEM** e pela **NATUREZA** (distintos entre si).

Considerando **(n > p)** temos como fórmula de Arranjos:

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo:

Numa prova de natação feita entre 8 nadadores, podemos determinar que as prováveis possibilidades de se montar o pódio é:

Resolução: 8 nadadores para compor um pódio que tem 3 posições: 1°, 2° e 3° lugares:

$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8.\,7.\,6.\,\cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 8.\,7.\,6 = 336 \text{ formas distintas}$$

2) COMBINAÇÕES:

É a área da Análise Combinatória em que seus elementos de diferenciam entre si somente pela sua **NATUREZA**. Considerando **(n > p)** temos como fórmula de Combinação:

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Exemplo:

De quantas formas podemos escolher 3 Conselheiros para compor o Conselho deliberativo de uma empresa sabendo que são 10 os concorrentes a essas vagas?

Resolução: 10 funcionários concorrendo a 3 vagas de um cargo de mesma Natureza:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10.\,9.\,8.\,\cancel{7!}}{6\,.\,\cancel{7!}} = \frac{10.\,9.\,8}{6} = \frac{720}{6} = 120$$

3) PERMUTAÇÕES:

É a área da Análise combinatória onde o total de elementos que serão agrupados devem ser iguais ao total de posições para esses agrupamentos, ou seja, **n = p**.

Esses agrupamentos através das Permutações a **ORDEM** são levados em consideração exatamente igual aos Arranjos com a diferença de n = p, enquanto que nos Arranjos n > p.

$$P_n = n!$$

Exemplos:

1) *Na padaria Pão e Delícia, para se comprar os pães deve se seguir a ordem de chegada para entrar na fila, ou seja, aqueles que chegam primeiro compram seus pães primeiro. Certo dia o funcionário que cuida de organizar a fila faltou e a funcionária selecionada para cuidar dessa parte é aluna de Matemática da Universidade Federal local, onde exatamente nessa época está estudando Análise Combinatória, dessa forma se ela colocar em prática seus conhecimentos sobre o assunto, sabendo que há 6 pessoas na fila, de quantas formas ela pode organizar essa fila desconsiderando o horário de chegada?*

RESOLUÇÃO:

Como são 6 pessoas para organizar cinco lugares (n = p) é um exemplo típico de Permutação. Assim temos:

$P_6 = 6! = 6.\,5.\,4.\,3.\,2.\,1 = 720$ formas distintas de organizar essas cinco pessoas na fila da Padaria.

2) *Quantos são os anagramas da palavra* ***MANTO****?*

RESOLUÇÃO:

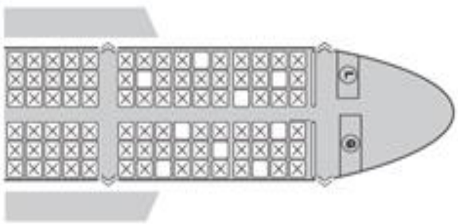
A palavra manto tem 5 letras portanto é:

P_5 = 5! = 5. 4. 3. 2. 1 = 120 anagramas distintos

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS DO ENEM SOBRE O TEMA ANÁLISE COMBINATÓRIA (ARRANJOS, COMBINAÇÕES E PERMUTAÇÕES)

01) **(ENEM)** Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.

Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).



O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

a) $\frac{9!}{2!}$

b) $\frac{9!}{7! \times 2!}$

c) $7!$

d) $\frac{5!}{2!} \times 4!$

e) $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

RESOLUÇÃO:
Como são 9 lugares e 7 pessoas temos: n > p
Poltrona = Posição

$$A_{9,7} = \frac{9!}{(9-7)!}$$

Assim temos: $\frac{9!}{2!}$

02) **(ENEM)** Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

a) 64

b) 56

c) 49

d) 36

e) 28

RESOLUÇÃO:
Como em cada jogo cada um dos jogador disputa a partida com outro jogador.
Temos n = 8 e p = 2 (n > p). A ordem não importa

$C_{8,2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!}$ $C_{8,2} = \frac{8.7.\cancel{6!}}{2!\,\cancel{6!}}$ $C_{8,2} = \frac{56}{2}$

$C_{8,2} = 28$

03) **(ENEM)** O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro.

Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

a) $\frac{10!}{2!\times 8!} - \frac{4!}{2!\times 2!}$

b) $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$

c) $\frac{10!}{2!\times 8!} - 2$

d) $\frac{6!}{4!} + 4\times 4$

e) $\frac{6!}{4!} + 6\times 4$

RESOLUÇÃO:
Como são 10 tenistas sendo 4 canhotos e 6 destros. Em cada jogo de uma partida de simples são dois jogadores.
Temos n = 10 e p = 2 (n > p). A ordem não importa
Como a particularidade é não termos jogos entre canhotos devemos calcular o TOTAL de partidas – TOTAL entre canhotos

$\frac{10!}{2!\,(10-2)!} - \frac{4!}{2!\,(4-2)!}$ $\frac{10!}{2!\ 8!} - \frac{4!}{2!\ 2!}$

a) $\frac{10!}{2!\times 8!} - \frac{4!}{2!\times 2!}$

04) **(ENEM)** Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato

oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que L e D representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções. A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adéqua às condições da empresa é:

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

RESOLUÇÃO:
O valor desejado equivale a n e deve estar no seguinte intervalo: $10^6 < n < 2.10^6$
Para saber qual melhor número se adequa ao intervalo, temos de calcular qual a quantidade total de possibilidades, que é o produto das possibilidades individuais de cada letra. Vamos aos cálculos:

O número de senhas para cada modelo de senha é

I – $26.10.10.10.10.10 = 26 \ . \ 10^5$

II – $10.10.10.10.10.10 = 10^6$

III – $26.26.10.10.10.10 = 26^2.10^4$

IV – $10.10.10.10.10 = 10^5$

V – $26.26.26.10.10 = 26^3.10^2$